第 5 章　定积分和反常积分

基础知识与规律总结

5.1　定积分的概念和性质

一、定积分的概念

1. 定积分的定义

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，在 $[a,b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b,$$

把 $[a,b]$ 分为 n 个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，用 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 表示各子区间的长度，在每个子区间上任取一点 $\xi_i, x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$，作如下和式

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n,$$

令 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在，且与 $[a,b]$ 的划分和 ξ_i 的取法无关，则该极限值就称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中，$f(x)$ 称为被积函数；$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积式；x 称为积分变量；$[a,b]$ 称为积分区间；a,b 分别称为积分的下、上限；$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为 $f(x)$ 的积分和.

如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分存在，则说 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

注 ① 定义的两个任意性：$[a,b]$ 区间划分的任意性和子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中 ξ_i 取法的任意性. 如果疏忽就可能出问题. 由 $\lambda\to 0$ 可推出 $n\to\infty$，反之不然.

② 用定积分定义求函数的积分，一般是对 $[a,b]$ 采取特殊的分法，ξ_i 采用特殊的取法，但该法要在被积函数可积的条件下进行.

③ 定积分是极限值，即定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示一个常数值，这个值只与被积函数及积分上、下限有关，而与用什么字母表示积分变量无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \cdots.$$

2. 几何意义

(1) 若 $f(x)\geqslant 0$，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a, x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积；

(2) 若 $f(x)\leqslant 0$，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a, x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积为 $-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；

(3) 若 $f(x)$ 符号不定，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a, x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形位于 x 轴上方的图形面积减去位于 x 轴下方的图形面积的差值.

【例 5.1】如图 5-1 所示，曲线段的方程为 $y=f(x)$，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 等于

(A) 曲边梯形 $ABCD$ 的面积

(B) 梯形 $ABCD$ 的面积

(C) 曲边三角形 ACD 的面积

(D) 三角形 ACD 的面积

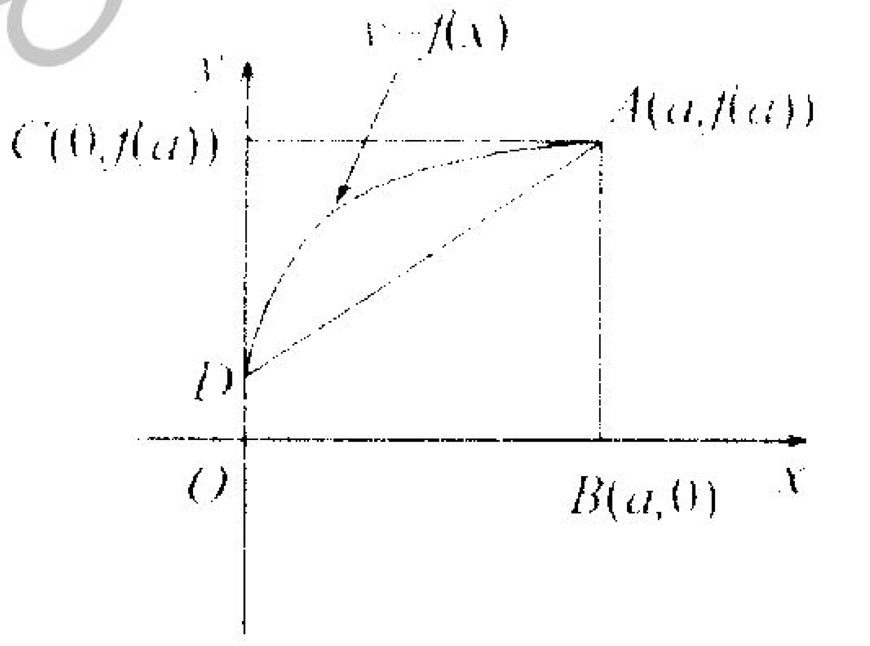

图 5-1

【分析】结合定积分的几何意义可看出.

【解】$\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x=\int_0^a x\mathrm{d}f(x)=af(a)-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

而 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ 表示曲边梯形 $OBAD$ 的面积，故可知 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 应为曲边三角形 ACD 的面积，即选(C).

3. 定积分存在的充分条件和必要条件

(1) 充分条件.

充分条件 1：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积；

充分条件 2：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，且有有限个不连续点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积；

充分条件 3：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是单调有界的，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

(2) 必要条件.

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，反之不成立.

二、定积分的性质

(1) 当 $a=b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，即 $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$.

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

交换定积分的上下限，绝对值不变而符号改变.

(3) $\int_a^b 1\mathrm{d}x=b-a$（可由定积分的几何意义得出）.

以下假定所列出的定积分都是可积的.

(4) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$（不论 a,b,c 的相对位置如何）.

即定积分对积分区间具有可加性，这个性质可推广到可列个积分区间的情形.

(5) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$k$ 为任意常数.

(6) $\int_a^b[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_k(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x\pm\cdots\pm\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x$.

(7)（**比较定理**）设 $f(x)\leqslant g(x)$，$x\in[a,b]$ $(a<b)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

推论：（Ⅰ）$f(x)\geqslant 0$，$x\in[a,b]$ $(a<b)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$；

若在 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)\geqslant 0$，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，则 $f(x)\equiv 0$.

（Ⅱ）$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ $(a<b)$.

【例 5.2】 使不等式 $\int_1^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>\ln x$ 成立的 x 的范围是

(A) $(0,1)$　　(B) $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$　　(C) $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$　　(D) $(\pi,+\infty)$

【分析】 $\int_1^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>\ln x$ 可转化为 $\int_1^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-\int_1^x\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{\sin t-1}{t}\mathrm{d}t=\int_x^1\frac{1-\sin t}{t}\mathrm{d}t>0$，然后利用定积分的比较定理的推论进行判断.

【解】 $\int_1^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>\ln x$ 等价于

$$\int_1^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-\int_1^x\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{\sin t-1}{t}\mathrm{d}t=\int_x^1\frac{1-\sin t}{t}\mathrm{d}t>0.$$

因为在上述四个区间内，$\frac{1-\sin t}{t}>0$，所以要使上式成立，须 $0<x<1$，故选(A).

(8)（**估值定理**）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 M,m，即 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，$x\in[a,b]$ $(a<b)$，则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a).$$

【例 5.3】 证明不等式：$\ln(n+1)\leqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$.

【证】 $\ln(n+1)=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，

令 $f(x)=\frac{1}{x}$，则 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$，故 $f(x)$ 在 $(1,n+1)$ 上单调减少，于是

$$f(i+1)<f(i),\ i=1,2,\cdots,n,$$

$$\ln(n+1)<\int_1^2\frac{1}{1}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{n}\mathrm{d}x=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$

$$\ln n=\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$>\int_1^2\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{3}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{1}{n}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

综上，可得 $\ln(n+1) \leqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$.

【例 5.4】求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

【解】因为$\frac{x^n}{2} \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n(0<x<1)$，所以

$$\int_0^1 \frac{x^n}{2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\mathrm{d}x,$$

得
$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1},$$

取 $n\to\infty$ 时的极限，根据夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=0.$$

【例 5.5】证明：(1) $\frac{1}{2} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^n}} \leqslant \frac{\pi}{6}(n>2)$；

(2) $2 \leqslant \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{8}{3}$.

【证】(1) 显然，当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$时，有 $1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (n>2)$，

则
$$\frac{1}{2}=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^n}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6},$$

即
$$\frac{1}{2} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^n}}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{6}.$$

(2) 令 $f(x)=\sqrt{1+x^4}$，$x\in[-1,1]$，

则
$$f'(x)=\frac{4x^3}{2\sqrt{1+x^4}}=\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}.$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$，又 $f(-1)=f(1)=\sqrt{2}$，$f(0)=1$，所以 $1 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{2}$.
上式两边对 x 在$[-1,1]$上积分，得不出右边要证的结果，故对 $f(x)$ 重新分析.

显然，$1 \leqslant f(x)=\sqrt{1+x^4} \leqslant \sqrt{1+2x^2+x^4}=1+x^2$，

则
$$2=\int_{-1}^1\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^1(1+x^2)\mathrm{d}x=\frac{8}{3},$$

即
$$2 \leqslant \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{8}{3}.$$

(9)(**积分中值定理**) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上至少存在一个 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\xi),\ a \leqslant \xi \leqslant b,$$

也可写成 $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，

此式称为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的**平均值公式**.

证明：$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a) \Rightarrow m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M$，由介值定理可证.

注 ① 积分中值公式$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\xi)$，$\xi$ 介于 a,b 之间，不论 $a>b$ 还是 $a<b$ 都是成立的.

② 按积分中值公式可得 $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，

称其为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值.

几何意义：在区间 $[a,b]$ 上至少存在一个 ξ，使得以区间 $[a,b]$ 为底边，以 $f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为 $f(\xi)$ 的矩形面积.

【例 5.6】 设 $b>a>0$，证明：存在一个 $\xi\in[a,b]$，使得 $\xi^2=\frac{b^2+ba+a^2}{3}$.

【分析】 $\xi^2=\frac{b^2+ba+a^2}{3}\Rightarrow(b-a)\xi^2=(b-a)\frac{b^2+ba+a^2}{3}=\frac{b^3-a^3}{3}=\frac{x^3}{3}\Big|_a^b=\int_a^b x^2\mathrm{d}x$.

【证】 $\int_a^b x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\Big|_a^b=\frac{b^3-a^3}{3}$，又 $\int_a^b x^2\mathrm{d}x=(b-a)\xi^2$，$a\leqslant\xi\leqslant b$（积分中值定理）.

故 $(b-a)\xi^2=(b-a)\frac{b^2+ba+a^2}{3}\Rightarrow\xi^2=\frac{b^2+ba+a^2}{3}$.

5.2 定积分的计算

一、微积分基本公式

1. 微积分基本定理

（1）变上限函数.

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，考虑定积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. 让 x 在 $[a,b]$ 上任意变动，对于 x 的每一个值，定积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 有一个唯一确定的值与之对应，这样在该区间就定义了一个函数，记作 $F(x)$，即 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，$x\in[a,b]$，称为变上限定积分.

注 若 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上是奇函数且连续，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数；

若 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上是偶函数且连续，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数.

（2）微积分基本定理.

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则由 $f(x)$ 在 $[a,x]$（$x\leqslant b$）上的定积分所定义的变上限函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，$x\in[a,b]$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，即

$$[F(x)]'=\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x).$$

微积分基本定理建立了原函数和定积分之间的联系，通过这个联系，定积分的计算可通过不定积分的计算得出.

注 ① 本定理说明了连续函数一定有原函数，且原函数是 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明有关命题的过程中要作辅助函数，这时可以考虑它的原函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

② 由 $\dfrac{\mathrm{d}\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]}{\mathrm{d}x}=f(x)$ 可知求导运算是求（变上限）定积分运算的逆运算.

2. 积分上限函数的导数

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对于任意的 $x\in[a,b]$，则变上限积分

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \text{ 对 } x \text{ 可导，且有 } F'(x)=f(x).$$

推论 1：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $\varphi(x)$ 可导，$F(x)=\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$，则

$$F'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

推论 2：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 均可导，$F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$，则

$$F'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x).$$

推论 3：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $\varphi(x)$，$\psi(x)$，$g(x)$ 均可导，

$F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)g(x)\mathrm{d}t$，则 $F(x)=g(x)\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$，于是

$$F'(x)=g'(x)\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t+g(x)\left[f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x)\right].$$

【例 5.7】 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} f(t)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$.

【解】 $F'(x)=f(\ln x)(\ln x)'-f\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{x}f(\ln x)+\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right).$

【例 5.8】 设 $f(x)$ 为连续函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^2 f(x+t)\mathrm{d}t$.

【解】 先将 x 从被积函数中移出来.

令 $u=x+t$，则 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}u$，且 $t=1$ 时，$u=x+1$；$t=2$ 时，$u=x+2$，于是

$$\int_1^2 f(x+t)\mathrm{d}t=\int_{x+1}^{x+2} f(u)\mathrm{d}u,$$

故 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^2 f(x+t)\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x+1}^{x+2} f(u)\mathrm{d}u=f(x+2)-f(x+1).$

【例 5.9】 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\mathrm{d}t$，则 $f'(x)$ 的零点个数为

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【解】 令 $f'(x)=2x\ln(2+x^2)=0$，得 $x=0$，故选 (B).

3. 牛顿－莱布尼茨公式（微积分基本公式）

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

注意条件：函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续的. 否则，如 $\int_{-1}^1 \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\neq 0$.

【例 5.10】 计算 $I=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$.

【解】 $I=2\int_{\frac{1}{4}}^{1}\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=2\int_{\frac{1}{4}}^{1}\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\mathrm{d}\sqrt{x}$

$= 2\arctan\sqrt{x}\Big|_1^4 = 2(\arctan 2 - \frac{\pi}{4})$.

二、定积分的换元法和分部积分法

1. 定积分的换元法

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，令 $x=\varphi(t)$，若 $\varphi(t)$ 满足条件：

(1) $\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上是连续的，且 $\varphi'(t)\neq 0$；

(2) $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$，当 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上变动时，x 在 $[a,b]$ 上变动，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

注 ① 在作变量代换时，一定要更换积分上、下限；

② 用 $x=\varphi(t)$ 引入新变量 t 时，一点要注意反函数 $\varphi^{-1}(t)$ 的单值、可导等条件.

③ 求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数 $\Phi(t)$ 后，不必像计算不定积分那样要把 $\Phi(t)$ 变换成原来变量 x 的函数，而只要把新变量 t 的上下限代入 $\Phi(t)$ 中然后相减就行了.

【例 5.11】 求下列积分

(1) $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$； (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

【解】 (1) 令 $x = a\sin t\left(0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t$，且 $x=0$ 时，$t=0$；$x=a$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$.

则
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos t\mathrm{d}t}{a\sin t + a\cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t},$$

令
$$u = \frac{\pi}{2} - t,$$

于是
$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin u}{\cos u+\sin u}\mathrm{d}(-u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\cos u+\sin u}\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t.$$

故 $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$.

(2) 令 $x = \tan t\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{d}x = \sec^2 t\mathrm{d}t$，$x=0$ 时，$t=0$；$x=1$ 时，$t=\frac{\pi}{4}$，

则
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\tan t)}{1+\tan^2 t}\sec^2 t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\mathrm{d}t,$$

令
$$u = \frac{\pi}{4} - t,$$

于是
$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\left(1+\tan(\frac{\pi}{4}-u)\right)\mathrm{d}(-u) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 - \ln(1+\tan t))\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

故 $2I = \frac{\pi}{4}\ln 2 \Rightarrow I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

【例 5.12】求下列积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}\mathrm{d}x$；　　(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}}\mathrm{d}x$.

【分析】对形如 $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{f(x)+g(x)}\mathrm{d}x$ 的积分，所作代换满足以下两点要求：

(1) 变换前后积分上下限不变，或者交换位置；

(2) 变换后，分母中的另一项替换了分子中的一项.

【解】(1) $I \xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{1+\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)^{\sqrt{2}}}\mathrm{d}(-t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\tan x)^{\sqrt{2}}}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}\mathrm{d}x$，

故
$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}.$$

(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=2-u} \int_2^0 \frac{\sqrt{3-u}}{\sqrt{3-u}+\sqrt{u+1}}\mathrm{d}(-u) = \int_0^2 \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}}\mathrm{d}x$，

故
$$2I = \int_0^2 1\mathrm{d}x = 2 \Rightarrow I = 1.$$

2. 定积分的分部积分法

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导函数，则有分部积分公式：
$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x).$$

注 公式中 $u=u(x)$，$\mathrm{d}v=v'(x)\mathrm{d}x$ 的选择参看不定积分的分部积分法.

【例 5.13】计算下列积分.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\displaystyle\int_1^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\mathrm{d}x$.

【解】(1)
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x &= \frac{\ln(1+x)}{2-x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2-x}\cdot\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x \\ &= \ln 2 - \frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \ln 2 - \frac{1}{3}\ln\frac{1+x}{2-x}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\ln 2.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&\int_1^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\mathrm{d}x \\ &= x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\Big|_1^3 - \int_1^3 x\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x \\ &= 3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \int_1^3 \frac{x}{2\sqrt{x}(x+1)}\mathrm{d}x \\ &= \pi - \frac{\pi}{4} - \int_1^3 \frac{x+1-1}{x+1}\mathrm{d}\sqrt{x} \\ &= \frac{3}{4}\pi - \sqrt{x}\Big|_1^3 + \arctan\sqrt{x}\Big|_1^3\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4}\pi - \sqrt{3} + 1 + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} + 1.$$

三、定积分计算中的常用公式

公式 1 （对称区间的积分） 设 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续，则

$$\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^l [f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f(x)\text{ 是奇函数} \\ 2\int_0^l f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 是偶函数} \end{cases}$$

注 该公式可简化计算奇偶函数在对称于原点的区间上的定积分.

证明：$I = \int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^l f(x)\mathrm{d}x + \int_{-l}^{0} f(x)\mathrm{d}x.$

而 $$\int_{-l}^{0} f(x)\mathrm{d}x \overset{令 x=-t}{=} \int_l^0 f(-t)\mathrm{d}(-t) = \int_0^l f(-t)\mathrm{d}t = \int_0^l f(-x)\mathrm{d}x.$$

所以 $$I = \int_0^l [f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x.$$

【例 5.14】 计算 $\int_{-1}^{1} (\sqrt{1+x^2}+x)^2 \mathrm{d}x.$

【解】 原式 $= \int_{-1}^{1} (1+x^2+2x\sqrt{1+x^2}+x^2)\mathrm{d}x$

$$= \int_{-1}^{1} 2x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} (1+2x^2)\mathrm{d}x$$

$$= 0 + 2\int_0^1 (1+2x^2)\mathrm{d}x = 2\left(x+\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{10}{3}.$$

【例 5.15】 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$，$a \geqslant 0$ 上连续，计算

$$I = \int_{-a}^{a} [(x+\mathrm{e}^{\cos x})f(x) + (x-\mathrm{e}^{\cos x})f(-x)]\mathrm{d}x.$$

【解】 $I = \int_{-a}^{a} \{x[f(x)+f(-x)] + \mathrm{e}^{\cos x}[f(x)-f(-x)]\}\mathrm{d}x$

$$= \int_{-a}^{a} x[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x + \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{\cos x}[f(x)-f(-x)]\mathrm{d}x$$

$$= 0 + 0 = 0.$$

（因为 $x[f(x)+f(-x)]$ 和 $\mathrm{e}^{\cos x}[f(x)-f(-x)]$ 在 $[-a,a]$ 上为奇函数）

【例 5.16】 求定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x.$

【解】 积分区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 是对称区间，但被积函数 $f(x)$ 是非奇非偶函数，于是令 $x=-t$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}} + \frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{x}}\right]\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\left[\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} + \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

公式 2 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，a 为任一实数，则

(1) $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x.$

(2) $\int_0^{nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$

【证】(1) $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$.

而 $\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{令u=x-T} \int_0^a f(u+T)\mathrm{d}u = \int_0^a f(u)\mathrm{d}u = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

所以 $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$（因为 $\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 0$）.

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x,$$

而 $\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{令u=x+T} \int_{\frac{T}{2}}^{T} f(u-T)\mathrm{d}u = \int_{\frac{T}{2}}^{T} f(u)\mathrm{d}u = \int_{\frac{T}{2}}^{T} f(x)\mathrm{d}x$.

所以

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{T}{2}}^{T} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) $\int_0^{nT} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{2T} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{(n-1)T}^{nT} f(x)\mathrm{d}x$

$$= \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_0^T f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

【例 5.17】求 $\int_{100}^{100+\pi} \sin^2(2x)(\tan x + 1)\mathrm{d}x$.

【解】因为 $\sin^2(2x)(\tan x+1)$ 以 π 为周期，

所以 原式 $= \int_0^\pi \sin^2(2x)(\tan x+1)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2x)\tan x\mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2x)\mathrm{d}x$

$$= 0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(4x)}{2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

公式 3 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi a^2}{4}, \int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi a^2}{2}$.

注 公式 3 利用定积分的几何意义直接可得.

【例 5.18】求 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$.

【解】$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x-1=t} \int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.

或直接利用几何意义.由 $\sqrt{2x-x^2} = y \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$ 知，该积分表示以(1,0)为中心，以 1 为半径的圆的 $\frac{1}{4}$ 的面积.

公式 4

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, & n \text{是奇数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n \text{是偶数} \end{cases}.$$

公式 5 三角函数族的正交性

$$\int_0^{2\pi} \sin\alpha x\sin\beta x\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin\alpha x\sin\beta x\,\mathrm{d}x = \begin{cases}\pi, \alpha=\beta \\ 0, \alpha\neq\beta\end{cases};$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x = \begin{cases}\pi, \alpha=\beta \\ 0, \alpha\neq\beta\end{cases};$$

$$\int_0^{2\pi}\sin\alpha x\cos\beta x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin\alpha x\cos\beta x\,dx=0.$$

四、分段函数的定积分

方法：首先分析积分上下限是被积函数定义域中哪个区间段上的点，然后按段积分. 另外，若被积函数或被积函数的主要部分是复合函数，先作变量替换，使之变为简单形式.

【例 5.19】 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ 2-x, & 1\leqslant x<2\\ 0, & x<0 \text{ 或 } x\geqslant 2\end{cases}$，求 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

【解】 (1) 当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_0^x 0dt=0$；

(2) 当 $0\leqslant x<1$ 时，$F(x)=\int_0^x tdt=\dfrac{x^2}{2}$；

(3) 当 $1\leqslant x<2$ 时，$F(x)=\int_0^1 tdt+\int_1^x(2-t)dt=\dfrac{1}{2}+\left(2t-\dfrac{t^2}{2}\right)\Big|_1^x=2x-\dfrac{x^2}{2}-1$；

(4) 当 $x\geqslant 2$ 时，$F(x)=\int_0^1 tdt+\int_1^2(2-t)dt+\int_2^x 0dt=1$.

综上，$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}x^2, & 0\leqslant x<1\\ 2x-\dfrac{x^2}{2}-1, & 1\leqslant x<2\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$.

【例 5.20】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^x}, x<0\\ \dfrac{1}{1+x}, x\geqslant 0\end{cases}$，计算 $\int_1^3 f(x-2)dx$.

【解】 令 $x-2=u$，则

$$\begin{aligned}\int_1^3 f(x-2)dx&=\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^1 f(x)dx\\&=\int_{-1}^0\frac{1}{1+e^x}dx+\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\\&=\int_{-1}^0\left(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{1+e^x}\right)de^x+\ln(1+x)\big|_0^1\\&=\ln\frac{e^x}{1+e^x}\Big|_{-1}^0+\ln 2=-\ln\frac{1}{e+1}=\ln(e+1).\end{aligned}$$

【例 5.21】 求下列积分.

(1) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx$；　(2) $\int_0^1 x|x-a|\,dx$；　(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,dx$.

【分析】 令绝对值符号内的式子等于 0，得出被积函数 $f(x)$ 的若干零点，再据此把积分区间分成若干个子区间，各子区间上的被积函数的绝对值号就可以去掉了（注意符号！），然后按段积分.

【解】 (1) 令 $\ln x=0\Rightarrow x=1$，则

$$I=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\mathrm{d}x+\int_{1}^{e}\ln x\mathrm{d}x=-(x\ln x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}\mathrm{d}x+(x\ln x)\Big|_{1}^{e}-\int_{1}^{e}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{e}+\left(1-\frac{1}{e}\right)+e-(e-1)=2-\frac{2}{e}.$$

(2) 因为 $0\leqslant x\leqslant 1$，所以

当 $a\leqslant 0$ 时，$\int_0^1 x|x-a|\mathrm{d}x=\int_0^1 x(x-a)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}$；

当 $0\leqslant a<1$ 时，令 $x-a=0\Rightarrow x=a$，则

$$\int_0^1 x|x-a|\mathrm{d}x=\int_0^a x(a-x)\mathrm{d}x+\int_a^1 x(x-a)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a^3}{6}+\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{6}=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}.$$

当 $a\geqslant 1$ 时，$\int_0^1 x|x-a|\mathrm{d}x=\int_0^1 x(a-x)\mathrm{d}x=\frac{a}{2}-\frac{1}{3}$.

(3) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x-\sin x|\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-(\sin x+\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}-2.$$

五、杂例

1. 利用定积分的定义求数列和 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_n$，当 $n\to\infty$ 的极限

条件：每项提出 $\frac{b-a}{n}$ 或 $\frac{1}{n}$ 后，n 项和可写成 $\sum\limits_{i=1}^{n}f\left[a+\frac{i(b-a)}{n}\right]$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$ 的形式.

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\cdot\frac{b-a}{n}$，特别 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$.

【例 5.22】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\ (p>1)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\cos\frac{\pi}{4n}+\cos\frac{3\pi}{4n}+\cdots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{4n}\right)$.

【解】 (1) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]\cdot\frac{1}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

(2) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p=\int_0^1 x^p\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}x^{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}$.

(3) 令 $S_n = \frac{\pi}{n}\left(\cos\frac{\pi}{4n}+\cos\frac{3\pi}{4n}+\cdots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{4n}\right)=2\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2i-1}{4n}\pi\cdot\frac{\pi}{2n}$,

S_n 可看做 $f(x)=\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的积分和式

$$2\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,\xi_i=\frac{2i-1}{4n},\Delta x_i=\frac{\pi}{2n},i=1,2,\cdots,n.$$

于是
$$I=\lim_{n\to\infty}S_n=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2.$$

2. 含有 $f(x)$ 及 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的方程, $f(x)$ 的求解

方法：要想到 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是常数，令 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=l$，代入方程，然后对方程的两边求 x 在 $[a,b]$ 上的定积分，得出 l，然后将 l 代入方程，即得 $f(x)$.

【例 5.23】 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

【解】 设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=l$，则 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\,l$.

两边在 $[0,1]$ 上积分，得

$$l=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+l\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1+\frac{\pi}{4}l=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}l.$$

于是 $l=\frac{\pi}{4-\pi}$，故

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{\pi}{4-\pi}\sqrt{1-x^2}.$$

5.3 反常积分及计算

一、无穷区间上的反常积分

定义 1 设函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上连续，取 $b\in[a,+\infty)$，如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限值为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分（或广义积分），记作 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，即有

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \quad ①$$

这时也称反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果该极限不存在，称反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,b]$ 上连续，取 $a\in(-\infty,b]$，如果极限

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限值为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,b]$ 上的反常积分（或广义积分），记作 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$，即有

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x. \quad ②$$

这时也称反常积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果该极限不存在，称反常积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 3 设函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，如果反常积分

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x,\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛，则称上述两个反常积分之和为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} f(x)\mathrm{d}x. \quad ③$$

这时也称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果该极限不存在，称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

注 对于①、②、③中的积分，若右边极限存在，则无穷积分收敛，否则发散；而对于③中的积分，右边若有一个极限不存在，则③式左边积分发散.

二、无界函数的反常积分（或瑕积分）

定义 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$，取 $\varepsilon>0$，如果极限

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限值为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上的反常积分（或瑕积分），记作 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x. \quad ①$$

这时也称反常积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果该极限不存在，称反常积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$，取 $\varepsilon>0$，如果极限

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限值为函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上的反常积分（或瑕积分），记作 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$，即有

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x. \quad ②$$

这时也称反常积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果该极限不存在，称反常积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 3 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上除点 $c\ (a<c<b)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$，如果反常积分

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \text{ 和} \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛，则称上述两个反常积分之和为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to 0^+}\int_a^{c-\eta}f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x, \qquad ③$$

这时也称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果该极限不存在，称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

注 对于①、②、③中的积分，若右边极限存在，则瑕积分收敛，否则发散；而对于③中右边若有一个极限不存在，则③式左边积分发散.

三、计算反常积分的步骤

(1) 判别所求积分的类型(无穷积分、瑕积分或混合积分)，分别计算；

(2) 对于既有无穷积分又有瑕积分的混合积分，则要将其分解，使单个积分只有一个瑕点或只有一个积分限为无穷的无穷积分，然后将其相加.

【例 5.24】 计算 $I=\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{e^{x+1}+e^{3-x}}\mathrm{d}x$.

【解】
$$I=\frac{1}{e^2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^{x-1}+e^{1-x}}\mathrm{d}x \overset{x-1=u}{=}\frac{1}{e^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^u+e^{-u}}\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{e^2}\int_0^{+\infty}\frac{e^u}{1+e^{2u}}\mathrm{d}u=\frac{1}{e^2}\arctan e^u\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{e^2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4e^2}.$$

【例 5.25】 计算 $I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}\mathrm{d}x$.

【解】 $x=1$ 为瑕点，所以

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}\mathrm{d}x+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}\mathrm{d}x$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}x+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}\mathrm{d}x$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\mathrm{d}x+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}\mathrm{d}x$$
$$=\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}+\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right]\Big|_1^{\frac{3}{2}}$$
$$=\arcsin 1+\ln(2+\sqrt{3})=\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3}).$$

【例 5.26】 计算反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}=\infty$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的瑕点，故该反常积分为混合型的.

从而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x+\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x.$

$I_1=\int_1^2\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x\xlongequal{x=1+t^2}\int_0^1\frac{2t}{(t^2+1)t}\mathrm{d}t=2\arctan t\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$；

$I_2=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x\xlongequal{x=1+t^2}\int_1^{+\infty}\frac{2t}{(t^2+1)t}\mathrm{d}t=2\arctan t\Big|_1^{+\infty}=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$

故 $I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x=\pi.$

5.4 定积分的应用

一、微元法

所谓微元法，就是对于那种计算量与自变量、自变量的变化区域以及定义在此区域中的函数有关，且具有对区域的可加性的积分问题的简化处理方法.

例如，在引入定积分的定义时，是这样处理“曲边梯形面积”的计算的：在$[a,b]$上取定一个区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，其上的曲边梯形的面积$=f(x)\mathrm{d}x$（此时把小的曲边梯形看做矩形），于是微元$\mathrm{d}s=f(x)\mathrm{d}x$，整个曲边梯形的面积为

$$A=\int_a^b\mathrm{d}s=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【例 5.27】 求由曲线 $y=4-x^2$ 及 $y=0$ 所围成的图形绕直线 $x=3$ 旋转一周所得的旋转体的体积.

【解】 如图 5-2 所示.

选择 y 为积分变量，且 $0\leqslant y\leqslant 4$，图中阴影部分绕 $x=3$ 旋转所成图形的体积为

$$\mathrm{d}V=[\pi\overline{PM}^2-\pi\overline{QM}^2]\mathrm{d}y.$$

注意到 $x_1=-\sqrt{4-y}$，$x_2=\sqrt{4-y}$，则

$$\mathrm{d}V=\pi[(3+\sqrt{4-y})^2-(3-\sqrt{4-y})^2]\mathrm{d}y=12\pi\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y.$$

故 $V=\int_0^4 12\pi\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y=64\pi.$

【例 5.28】 设半径为 R 的球体体密度 $\mu=r^2$，若 r 是球内任一点到球心的距离，求球体的质量.

【解】 如图 5-3 所示.

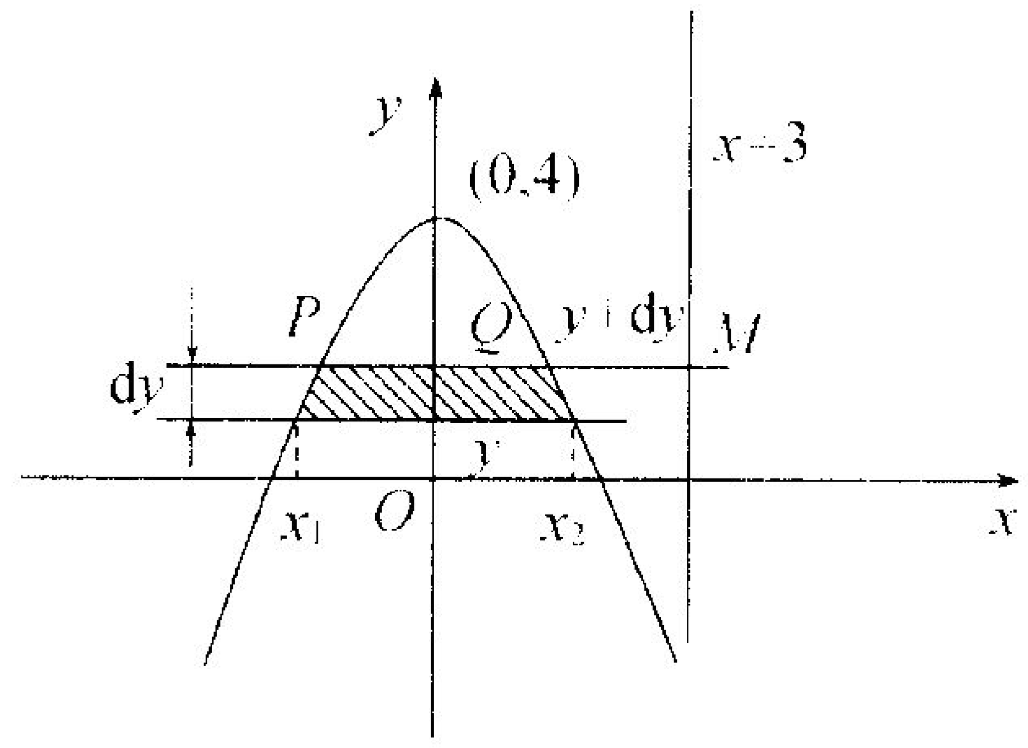

图 5-2

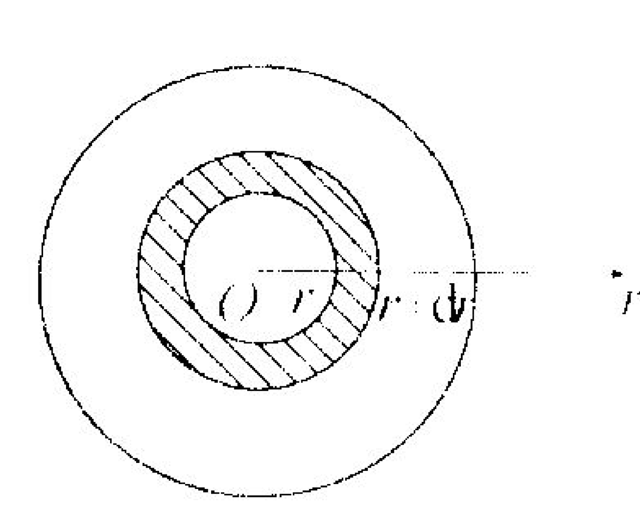

图 5-3

选极坐标系，积分变量选择 r，以极点 O 为中心，r 为内径，厚度为 $\mathrm{d}r$ 的球壳体积为

$$dV = 4\pi r^2 dr,$$

由于 dr 很小，球壳密度可看做均匀的，为 $\mu = r^2$，于是其质量为

$$dM = 4\pi r^2 dr \cdot r^2 = 4\pi r^4 dr.$$

故 $M = \int_0^R 4\pi r^4 dr = \frac{4}{5}\pi r^5 \Big|_0^R = \frac{4}{5}\pi R^5.$

注 以后教材中重积分、曲线积分、曲面积分都用微元法处理显得格外简便.

二、平面图形的面积

方法：先画草图，确定积分变量的变化范围，即确定定积分的上下限，最后计算定积分. 不同情形下平面图形的面积公式如下.

(1) 直角坐标系下图形的面积.

先区分是 X 型还是 Y 型平面图形.

① 若是 X 型，即由曲线 $y = f_1(x)$，$y = f_2(x)$ 及直线 $x = a$，$x = b(a < b)$ 所围成的曲边图形面积为 $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$. 若在 $[a,b]$ 上，$f_1(x) \leqslant f_2(x)$，则

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

② 若是 Y 型，即由曲线 $x = g_1(y)$，$x = g_2(y)$ 及直线 $y = c$，$y = d(c < d)$ 所围成的曲边图形面积为 $S = \int_c^d |g_1(y) - g_2(y)| dy$. 若在区间 $[c,d]$ 上，$g_1(y) \leqslant g_2(y)$，则

$$S = \int_c^d [g_2(y) - g_1(y)] dy.$$

③ 计算既不是 X 型也不是 Y 型的平面图形 D 的面积时，先将 D 划分为若干个 X 型或 Y 型图形或用极坐标先处理一下再说.

(2) 极坐标系下平面图形的面积

① 由连续曲线 $\rho = \rho_1(\theta)$，$\rho = \rho_2(\theta)$ $(\rho_1(\theta) \leqslant \rho_2(\theta))$ 与两条射线 $\theta = \alpha$，$\theta = \beta(\alpha < \beta)$ 所围成的图形面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [\rho_2^2(\theta) - \rho_1^2(\theta)] d\theta.$$

② 由曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha$，$\theta = \beta(\alpha < \beta)$ 所围成的曲边扇形面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [\rho(\theta)]^2 d\theta.$$

【例 5.29】计算由抛物线 $y = 2x - x^2$ 和直线 $y = -x$ 所围平面图形的面积.

【解】作草图 5-4，本平面图形为 X 型，需先确定 x 的变化范围.

解联立方程 $\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases}$ 得两曲线交点为：$(0,0)$，$(3,-3)$，则 $0 \leqslant x \leqslant 3$.

又因为在区间 $[0,3]$ 上，$-x \leqslant 2x - x^2$，故所求平面图形面积为：

$$S = \int_0^3 [2x - x^2 - (-x)] dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \frac{9}{2}.$$

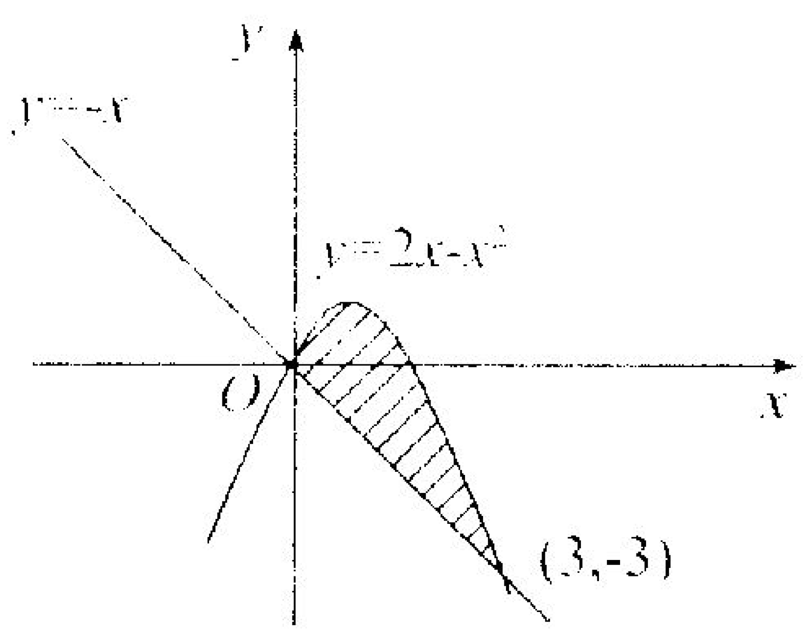

图 5-4

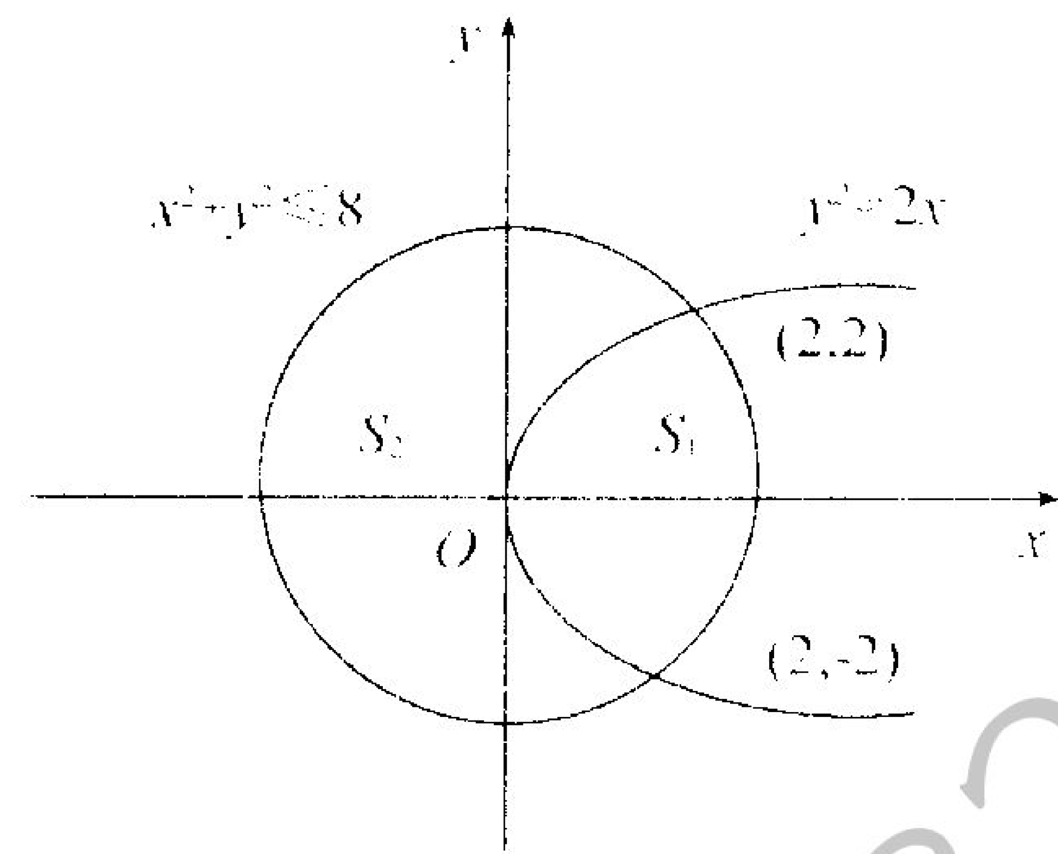

图 5-5

【例 5.30】计算圆域 $x^2+y^2\leqslant 8$ 被抛物线 $y^2=2x$ 所分成的两部分的面积.

【解】作草图如图 5-5 所示.

解联立方程 $\begin{cases}x^2+y^2=8\\y^2=2x\end{cases}$,得两曲线交点为 $(2,-2)$,$(2,2)$.

先求右半部分的面积,S_1 为 Y 型图,$-2\leqslant y\leqslant 2$.

又因为在区间 $[-2,2]$ 上,$\dfrac{y^2}{2}\leqslant\sqrt{8-y^2}$,所以

$$S_1=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-y^2}-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$=\left(\frac{y}{2}\sqrt{8-y^2}+4\arcsin\frac{y}{2\sqrt{2}}-\frac{y^3}{6}\right)\Big|_{-2}^{2}=2\pi+\frac{4}{3}.$$

由于圆 $x^2+y^2=8$ 的面积为 $S=8\pi$,

故左半部分的面积为:$S_2=S-S_1=8\pi-\left(2\pi+\dfrac{4}{3}\right)=6\pi-\dfrac{4}{3}$.

三、旋转体的体积

(1) 由曲线 $y=f(x)>0$ 和直线 $x=a$,$x=b(a<b)$ 及 x 轴围成的图形:

① 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为 $V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx$;

② 绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积为 $V_y=2\pi\int_a^b xf(x)dx$.

(2) 由曲线 $y=f_1(x)$,$y=f_2(x)$ $(f_1(x)\leqslant f_2(x))$ 和直线 $x=a$,$x=b(a<b)$ 围成的图形:

① 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为 $V_x=\pi\int_a^b[f_2^2(x)-f_1^2(x)]dx$;

② 绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V_y=2\pi\int_a^b x[f_2(x)-f_1(x)]dx.$$

【例 5.31】求介于抛物线 $y=x^2$ 和 $y=\sqrt{x}$ 之间的区域绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积.

【解】作草图,如图 5-6 所示.

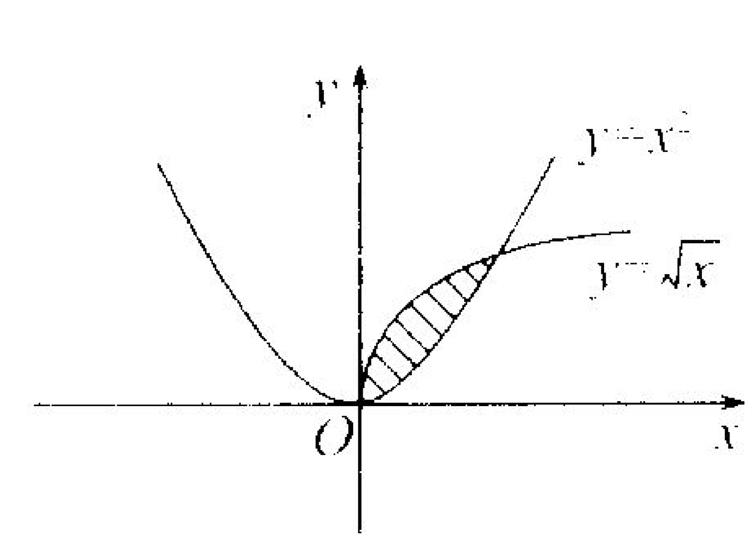

图 5-6

可求出交点为 $(0,0)$,$(1,1)$,且在区间 $[0,1]$ 上,$\sqrt{y}>y^2$,于是

$$V=\pi\int_0^1(y-y^4)dy=\pi\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{3\pi}{10}.$$

【例 5.32】 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y\geqslant 0$. 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围的面积为 $\dfrac{1}{3}$，试确定常数 a,b,c，使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

【解】 因为抛物线过原点，所以 $c=0$.

又由题设可知 $\displaystyle\int_0^1(ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}$，即 $b=\dfrac{2}{3}(1-a)$.

$$且\ V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2\right)$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{4}{27}(1-a)^2\right]=\pi\left(\frac{2}{135}a^2+\frac{a}{27}+\frac{4}{27}\right).$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=0$，则 $\dfrac{4}{135}a+\dfrac{1}{27}=0\Rightarrow a=-\dfrac{5}{4},b=\dfrac{3}{2}$.

因为 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}a^2}\right|_{a=-\frac{5}{4}}=\dfrac{4}{135}\pi>0$，所以当 $a=-\dfrac{5}{4},b=\dfrac{3}{2},c=0$ 时体积 V 最小.

四、旋转体的侧面积

(1) 若旋转体由 $y=f(x)\geqslant 0$ 和直线 $x=a,x=b(a<b)$ 所围的平面图形绕 x 轴旋转而成，则旋转曲面的侧面积为 $S=2\pi\displaystyle\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

(2) 若旋转体由 $y=f_1(x)\geqslant 0,y=f_2(x)\geqslant 0,f_1(x)\leqslant f_2(x)$ 和直线 $x=a,x=b(a<b)$ 所围的平面图形绕 x 轴旋转而成，则旋转曲面的侧面积为

$$S=S_1+S_2=2\pi\int_a^b f_1(x)\sqrt{1+f_1'^2(x)}\,\mathrm{d}x+2\pi\int_a^b f_2(x)\sqrt{1+f_2'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

【例 5.33】 过原点作曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 的切线，求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积.

【解】 作草图，如图 5-7 所示.

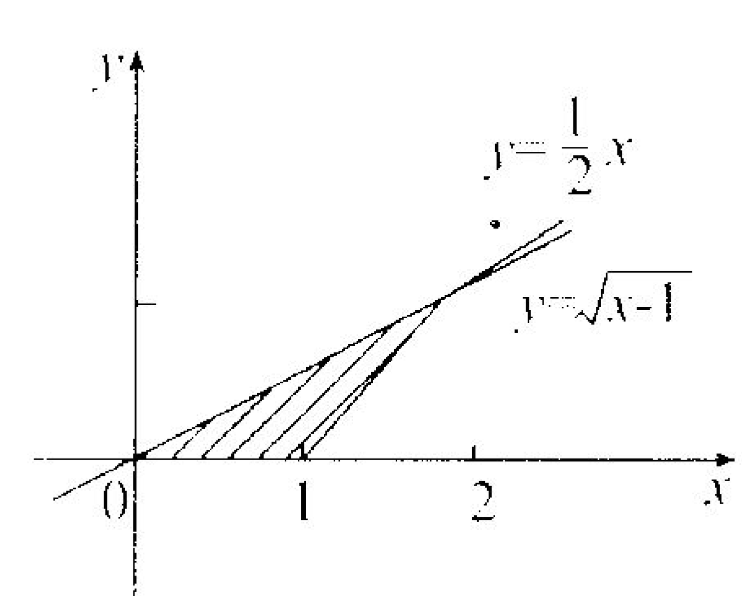

图 5-7

设切点为 $(x_0,\sqrt{x_0-1})$，则过原点的切线方程为

$$y=\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}x.$$

再将点 $(x_0,\sqrt{x_0-1})$ 代入，解得

$$x_0=2,y_0=\sqrt{x_0-1}=1.$$

所以切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$.

由曲线 $y=\sqrt{x-1}\,(1\leqslant x\leqslant 2)$ 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转面的面积为

$$S_1=\int_1^2 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

由直线段 $y=\dfrac{1}{2}x\,(0\leqslant x\leqslant 2)$ 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转面的面积为

$$S_2=\int_0^2 2\pi\,\frac{1}{2}x\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{d}x=\sqrt{5}\pi.$$

因此，所求旋转体的表面积为 $S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{6}(11\sqrt{5} - 1)$.

【例 5.34】 求曲线 $\begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = t - \sin t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 绕 x 轴和 y 轴旋转一周所得到的旋转面的面积.

【解】
$$\begin{cases} x' = \sin t \\ y' = 1 - \cos t \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

设 S_x 与 S_y 分别是曲线绕 x 轴和 y 轴旋转一周所得到的旋转面的面积，则

$$S_x = 2\pi\int_0^{2\pi} y \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = 2\pi\int_0^{2\pi} (t - \sin t) \cdot 2\sin\frac{t}{2}\,dt = 16\pi^2.$$

$$S_y = 2\pi\int_0^{2\pi} x \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = 2\pi\int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \cdot 2\sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{64}{3}\pi^2.$$

五、已知截面面积的立体的体积

方法：已知截面积为 $s(x)$，区间为 $[a,b]$，则 $V = \int_a^b s(x)\,dx$.

【例 5.35】 求由圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$，$x^2 + z^2 = a^2$ 所围立体的体积.

【解】 由于对称性，我们只要求第一象限的立体体积，过 x 点 $(0 \leqslant x \leqslant a)$ 且垂直于 x 轴的平面与该立体的截面为边长为 $\sqrt{a^2 - x^2}$ 的正方形，则 $s(x) = a^2 - x^2$.

$$V = 8\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = 8\left(a^2 x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^a = \frac{16}{3}a^3.$$

六、平面曲线的弧长

不同情形下的曲线弧长的计算公式：

(1) 直角坐标下.

① 光滑曲线的方程为 $y = f(x)(a \leqslant x \leqslant b)$ 的弧长为 $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$;

② 光滑曲线的方程为 $x = g(y)(c \leqslant y \leqslant d)$ 的弧长为 $l = \int_c^d \sqrt{1 + g'^2(y)}\,dy$.

(2) 极坐标系下.

曲线方程为 $\rho = \rho(\theta)(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$ 的弧长为 $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)}\,d\theta$.

(3) 曲线方程为参数式 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$，$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$，则其弧长为

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt.$$

【例 5.36】 求曲线 $y = \ln(1 - x^2)$ 上相应于 $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ 的一段弧.

【解】
$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{1 - x^2}\right)^2}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 + x^2}{1 - x^2}\,dx = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x}\right]dx - \frac{1}{2} \\ &= \ln\frac{1 + x}{1 - x}\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \ln 3 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【例 5.37】求摆线$\begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = t - \sin t \end{cases}$上相应于$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$的一拱.

【解】$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + (1 - \cos t)^2}\,dt = 2\int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\,dt = 8.$

七、一元积分在物理上的应用

1. 求变力沿直线所做的功

方法：设某质点在变力作用下，沿x轴从点a运动到点b，力的方向始终与x轴平行，变力大小由函数$f(x)$表示，它在$[a,b]$上连续，则所求的功为$W = \int_a^b f(x)\,dx$.

【例 5.38】某建筑工程打地基时，需用汽锤将桩打进土层. 汽锤每次击打，都将克服土层对桩的阻力而做功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比(比例系数$k > 0$)，汽锤第一次击打将桩打进地下a m. 根据设计方案，要求汽锤每次击打桩时所做的功与前一次击打桩时所做的功之比为常数$r(0 < r < 1)$，问：

(1) 汽锤击打桩 3 次后，可将桩打进地下多深?

(2) 若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下多深?

(注：m 表示长度单位米)

【解】(1) 记x_n是第n次击打将桩打进地下的深度，W_n是第n次击打所做的功，由题设，当桩被打进地下的深度为x时，土层对桩的阻力的大小为kx，于是

$$x_1 = a, W_1 = \int_0^{x_1} kx\,dx = \int_0^a kx\,dx = \frac{1}{2}ka^2;$$

由于$W_2 = rW_1$，即$\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = r \cdot \frac{1}{2}ka^2$，所以$x_2^2 - a^2 = ra^2$，即$x_2 = \sqrt{1+r}\,a$.

由于$W_3 = rW_2 = r^2W_1$，即$\int_{x_2}^{x_3} kx\,dx = r^2 \cdot \frac{1}{2}ka^2$，所以$x_3 = \sqrt{1+r+r^2}\,a$.

即汽锤击打桩 3 次后，可将桩打进地下$\sqrt{1+r+r^2}\,a$ m.

(2) 设$x_n = \sqrt{1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}}\,a$.

由于$W_{n+1} = r^nW_1$，即$\int_{x_n}^{x_{n+1}} kx\,dx = r^n \cdot \frac{1}{2}ka^2$，所以$x_{n+1} = \sqrt{1+r+r^2+\cdots+r^n}\,a$.

从而由归纳法可得$x_n = \sqrt{1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}}\,a$.

所以，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}}\,a = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1-r^n}{1-r}}\,a = \sqrt{\frac{1}{1-r}}\,a$，

即当击打次数不限时，汽锤至多能将桩打进地下$\sqrt{\frac{1}{1-r}}\,a$ m.

2. 求静止液体的侧压力

方法：设一平面板铅直地浸入比重为ρ的液体中，取x轴铅直向下，液面与y轴重合，此时平面板四周的曲线方程为$y = f_1(x)$，$y = f_2(x)$ $(f_1(x) \leqslant f_2(x))$及$x = a$，$x = b(a < b)$，则平面板一侧所受压力为$F = \rho g\int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]\,dx$. 原理为：压力 = 压强 × 面积.

【例 5.39】某闸门的形状与大小如图 5-8 所示，其中直线 l 为对称轴，闸门的上部为矩形 $ABCD$，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成，当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5 ∶ 4，闸门矩形部分的高 h 应为多少米？

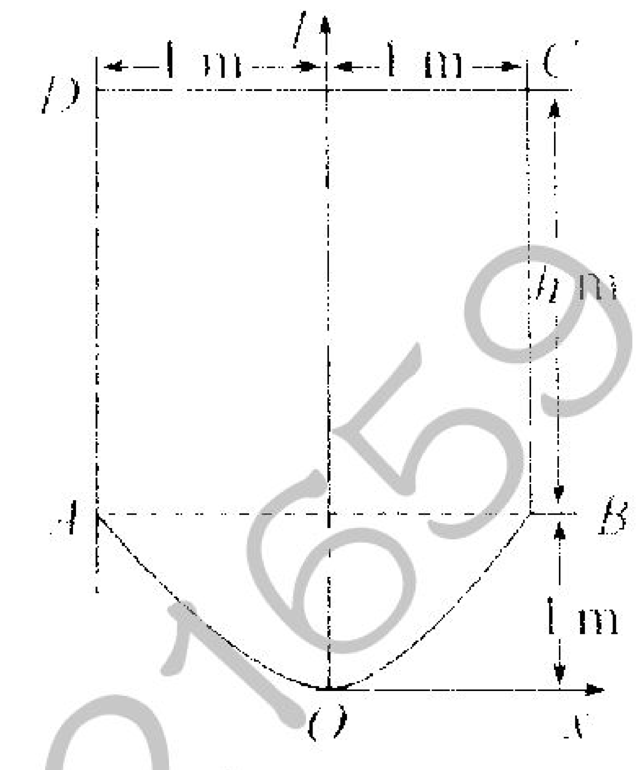

图 5-8

【解】建立如图 5-9 所示坐标系.

则抛物线的方程为 $y=x^2$，闸门矩形部分承受的水压力

$$p_1=2\int_1^{h+1}\rho g(h+1-y)\mathrm{d}y$$

$$=2\rho g\left[(h+1)y-\frac{y^2}{2}\right]\Big|_1^{h+1}=\rho g h^2.$$

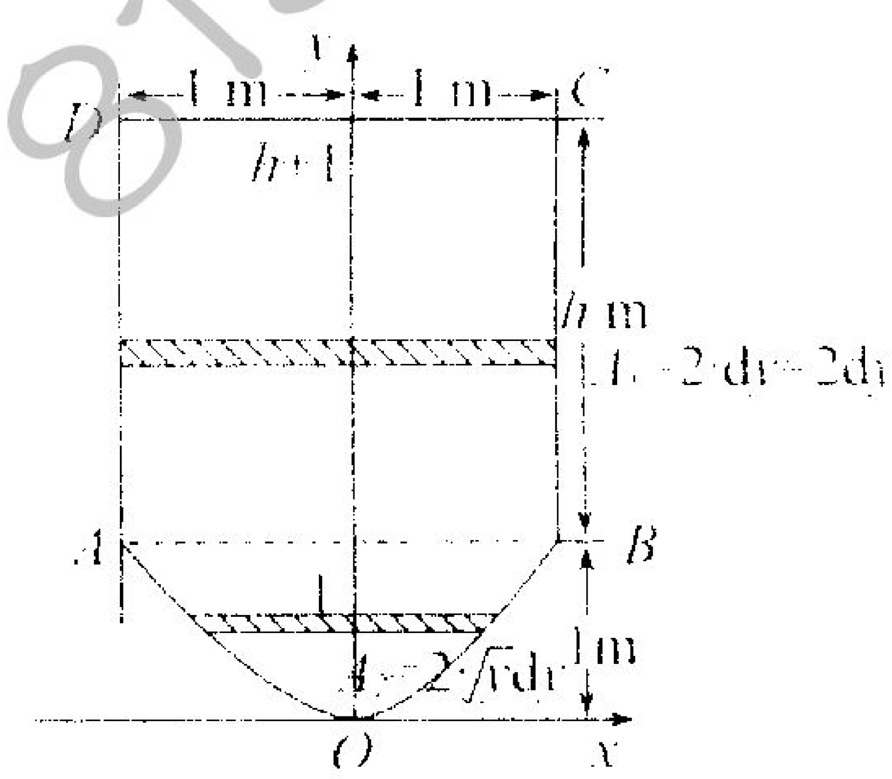

图 5-9

其中 ρ 为水的密度，g 为重力加速度，闸门下部承受的水压力

$$p_2=2\int_0^1\rho g(h+1-y)\sqrt{y}\,\mathrm{d}y=4\rho g\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right).$$

由题意知，$p_1:p_2=5:4$，即 $\dfrac{h^2}{4\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right)}=\dfrac{5}{4}$.

得 $h=2$，$h=-\dfrac{1}{3}$（舍去）.

故 $h=2$，即闸门矩形部分的高应为 2 m.

3. 求引力

当引力 $\mathrm{d}F$ 的方向不随小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的改变而变化时，可直接用引力公式和微元法；当引力 $\mathrm{d}F$ 的方向随小区间的改变而变化时，可将引力分解为横向、纵向两个分力后再分别用微元法.

【例 5.40】如图 5-10 所示，一质量为 m 的质点位于原点，一根线密度为 ρ、长为 l 的均匀细棒在区间 $[a,a+l]$ 上，已知引力系数为 k，求细棒对质点的引力.

图 5-10

【解】细棒在 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 这一段的质量为 $\rho\mathrm{d}x$，对质点的引力为 $\mathrm{d}F=k\cdot\dfrac{m\rho\mathrm{d}x}{x^2}$.

故细棒对质点的引力 $F=\displaystyle\int_a^{a+l}\frac{km\rho}{x^2}\mathrm{d}x=k\rho m\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right)=\frac{k\rho ml}{a(a+l)}$.

习　题　五

一、单项选择题

1. 已知当 $x\to 0$ 时，$\int_0^{x}(\sin t+\sin t^2)\mathrm{d}t$ 与 ax^k 是等价无穷小，则

A. $a=3$，$k=\dfrac{3}{2}$.　　　　B. $a=\dfrac{2}{3}$，$k=3$.

C. $a=3$，$k=\dfrac{2}{3}$.　　　　D. $a=\dfrac{3}{2}$，$k=3$.　　　　【　　】

2. 设函数 $f(x)$ 连续，则在下列变上限定积分定义的函数中，必为偶函数的是

A. $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$.　　B. $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$.

C. $\int_0^x f(t^2)dt$.　　D. $\int_0^x f^2(t)dt$.　　【　】

3. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则

A. $F(x)$ 在 $x=0$ 点不连续.

B. $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，但在 $x=0$ 点不可导.

C. $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且满足 $F'(x)=f(x)$.

D. $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，但不一定满足 $F'(x)=f(x)$.　　【　】

4. 下列结论中正确的是

A. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1\frac{dx}{x(x+1)}$ 都收敛.　　B. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1\frac{dx}{x(x+1)}$ 都发散.

C. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$ 发散，$\int_0^1\frac{dx}{x(x+1)}$ 收敛.　　D. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$ 收敛，$\int_0^1\frac{dx}{x(x+1)}$ 发散.【　】

5. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)\leqslant g(x)$，则对任何 $c\in(0,1)$

A. $\int_{\frac{1}{2}}^c f(t)dt\geqslant\int_{\frac{1}{2}}^c g(t)dt$.　　B. $\int_{\frac{1}{2}}^c f(t)dt\leqslant\int_{\frac{1}{2}}^c g(t)dt$.

C. $\int_c^1 f(t)dt\geqslant\int_c^1 g(t)dt$.　　D. $\int_c^1 f(t)dt\leqslant\int_c^1 g(t)dt$.　　【　】

二、填空题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx=$ ________.

2. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx=$ ________.

3. $\int_0^2|x-x^2|dx=$ ________.

4. 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且满足 $f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x dx$，则 $f(x)=$ ________.

5. 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^a}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,dt$ 存在并且不等于零，则 $a=$ ________.

三、计算题

1. 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$.

2. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)dt=\frac{1}{2}\arctan x^2$，已知 $f(1)=1$，求 $\int_1^2 f(x)dx$.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导，$f(0)=0$，且其反函数为 $g(x)$.

若 $\int_0^{f(x)}g(t)dt=x^2e^x$，求 $f(x)$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant0\\ e^{-x}, & x>0\end{cases}$，求 $\int_1^3 f(x-2)dx$.

四、证明题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\mathrm{d}t$，试证：

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数；

(2) 若 $f(x)$ 单调不增，则 $F(x)$ 单调不减.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$，试证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

参　考　答　案

一、1. B　2. A　3. B　4. D　5. D

二、1. 0.　2. $\frac{1}{2}\ln 2$.　3. 1.　4. $f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\frac{\pi^2}{2}$.　5. $a=2$.

三、1. $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\mathrm{d}x=\ln 2$.（提示：用分部积分法）

2. $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}$.（提示：令 $u=2x-t$）

3. 两边求导后，利用 $g[f(x)]=x$，然后积分并利用 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续性即可得 $f(x)=(x+1)e^x-1$.

4. $\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{7}{3}-\frac{1}{e}$.

四、1. (1) 提示：利用变量代换 $t=-u$；

(2) 提示：利用导数判断单调性的方法和积分中值定理.

2. 提示：设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，由 $\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^\pi F(x)\sin x\mathrm{d}x=\pi F(\xi)\sin\xi=0$（积分中值定理），可推得 $F(\xi)=0,\xi\in(0,\pi)$（或利用反证法）. 然后对 $F(x)$ 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,\pi]$ 上分别应用罗尔定理即可得证.